Erwartungshorizont

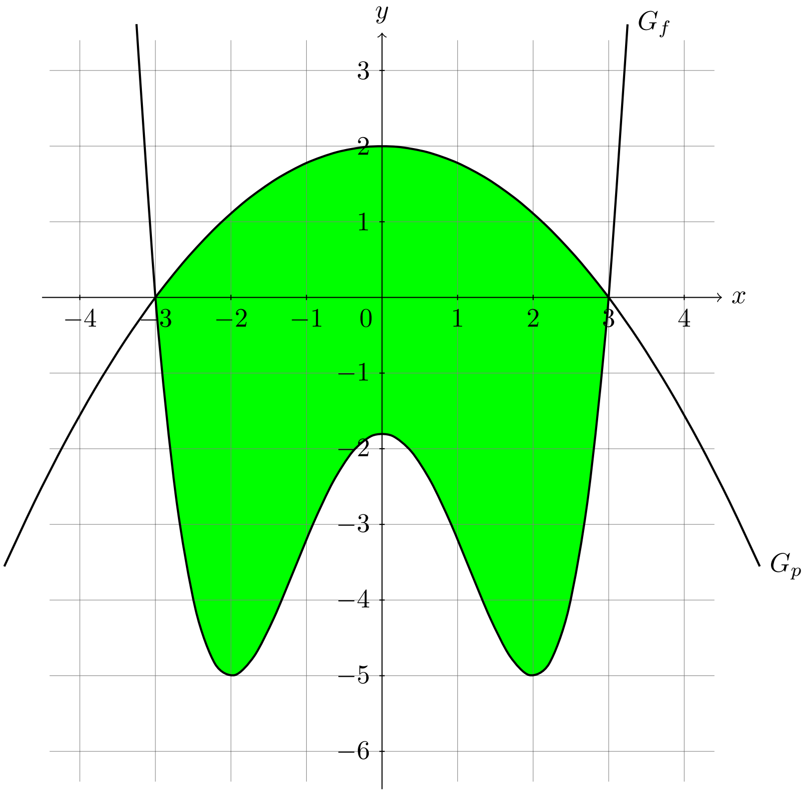
Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{5}(x^2-9)(x^2+1)$ und $p : x \mapsto -\frac{2}{9}(x^2-9)$

a) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit ihren Vielfachheiten. (2 BE)

Die Funktion ist in Linearfaktorzerlegung gegeben, daher lassen sich die Nullstellen leicht ablesen: je eine einfache Nullstelle bei $x = \pm 3$.

b) Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: $-4 \leq x \leq 4$; $-6 \leq y \leq 3$) (3 BE)



c) Die Graphen von f und p schließen ein endliches Flächenstück ein. Markiere diese Fläche in der Zeichnung und berechne ihre Maßzahl. (8 BE)

Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) \\ \frac{1}{5}(x^2-9)(x^2+1) &= -\frac{2}{9}(x^2-9) \qquad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \\ \frac{1}{5}(x^2+1) &= -\frac{2}{9} \\ x^2+1 &= -\frac{10}{9} \\ x^2 &= -\frac{19}{9} \qquad \Rightarrow \textit{ keine weiteren Schnittpunkte} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^3 p(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 -\frac{2}{9}(x^2-9) - \frac{1}{5}(x^2-9)(x^2+1)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^3 -\frac{2}{9}x^2 + 2 - \frac{1}{5}(x^4 - 8x^2 - 9)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 -\frac{2}{9}x^2 + 2 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{9}{5}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^3 -\frac{1}{5}x^4 + \frac{62}{45}x^2 + \frac{19}{5}\,\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{1}{25}x^5 + \frac{62}{135}x^3 + \frac{19}{5}x\right]_0^3 \\
&= 2\left[\left(-\frac{1}{25}3^5 + \frac{62}{135}3^3 + \frac{19}{5}3\right) - 0\right] = 2\left(-\frac{243}{25} + \frac{1674}{135} + \frac{57}{5}\right) \\
&= 2\left(-\frac{243}{25} + \frac{1674}{135} + \frac{57}{5}\right) = 2\cdot\frac{352}{25} = \frac{704}{25} = 28,16\,[\mathrm{FE}]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Der einäugige Pelikan Quacks fliegt in der Flug-Show eines Zoos mit. Dabei fliegt er unter anderem im Sturzflug mehrfach ein Wasserbecken an und sammelt bunte Plastikbälle die auf der Wasseroberfläche schwimmen. In 64% der Fälle erwischt er auch wirklich einen Ball.
In der heutigen Show soll Quacks 8 Sturzflüge vorführen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der mindestens 3 Bälle erwischt? (3 BE)

$$
\begin{aligned}
P(\text{„mindestens 3 Bälle“}) &= P(\{3,4,5,6,7,8\}) = 1 - P(\{0,1,2\}) \\
&= 1 - [B(8;0,64;0) + B(8;0,64;1) + B(8;0,64;0)] \\
&= 1 - \left[\binom{8}{0}0,64^0 0,36^8 + \binom{8}{1}0,64^1 0,36^7 + \binom{8}{2}0,64^2 0,36^6\right] \\
&= 1 - [0,00028211099 + 0,00401224520 + 0,02496508126] \\
&= 1 - 0,02925943745 = 0,97074056255
\end{aligned}
$$

b) Ist es wahrscheinlicher, dass er genau 5 Bälle erwischt, oder dass er genau 6 Bälle erwischt? (2 BE)

$$
\begin{aligned}
P(\text{„genau 5 Bälle“}) &= B(8;0,64;5) = \binom{8}{5}0,64^5 0,36^3 = 0,2805403918 \\
P(\text{„genau 6 Bälle“}) &= B(8;0,64;6) = \binom{8}{6}0,64^6 0,36^2 = 0,2493692372
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ *genau 5 Bälle sind wahrscheinlicher!*

Aufgabe 3

Die Gemeinde Schulheim im Münchner Norden möchte eine eigene FOS/BOS errichten. Um die Genehmigung zu bekommen, müssten sich mindestens 20% der in Frage kommenden Schüler für diesen Standort entscheiden. Um dies zu prüfen werden bei den Einschreibungen der umgebenden Schulen insgesamt 200 Schüler befragt für welchen Standort sie sich entscheiden würden, wenn es auch in Schulheim eine FOS/BOS gäbe.

Anmerkung zur Lösung: Die Aufgabe kann sowohl als einseitiger, wie auch als zweiseitiger Test verstanden werden. Dementsprechend gibt es für beide Lösungen die volle Punktzahl!

a) Gib die Nullhypothese und die Gegenhypothese an. (1 BE)

Einseitiger Test: $H_0 : p \geq 0,2 \quad H_1 : p < 0,2$
Zweiseitiger Test: $H_0 : p = 0,2 \quad H_1 : p \neq 0,2$

b) Bestimme Annahme- und Ablehnungsbereich so, dass der α-Fehler höchstens 12% beträgt. (4 BE)

Einseitiger Test: $\bar{A} = \{0, \ldots, k\}, A = \{k+1, \ldots, 200\}$

$$P(\alpha) = P(\bar{A}) \leq 0,12 \overset{TW}{\Rightarrow} P(\bar{A}) = F(200; 0,2; k) = 0,8993 \textit{ falls } k = 32$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \{0, \ldots, 32\}, A = \{33, \ldots, 200\}$$

Zweiseitiger Test: $\bar{A} = \{0, \ldots, k\} \cup \{m, \ldots, 200\}, A = \{k+1, \ldots, m-1\}$

$$P(\alpha) = P(\bar{A}) \leq 0,12 \Rightarrow P(\{0, \ldots, k\}) \leq 0,06 \textit{ und } P(\{m, \ldots, 200\}) \leq 0,06 \overset{TW}{\Rightarrow}$$

$$P(\{0, \ldots, k\}) = 0,4302, P(\{m, \ldots, 200\}) = 1 - P(\{0, \ldots, m-1\}) = 0,0494 \textit{ falls } k = 30, m = 49$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \{0, \ldots, 30\} \cup \{49, \ldots, 200\}, A = \{31, \ldots, 48\}$$

c) Tatsächlich liegt der Anteil derer, die gerne in Schulheim die FOS/BOS besuchen würden, nur bei $\frac{1}{6}$. Bestimme mit dieser Information den β-Fehler. (2 BE)

Einseitiger Test:

$$\begin{aligned} P(\beta) &= P(A) = P(\{33, \ldots, 200\}) = 1 - P(\{0, \ldots, 32\}) = 1 - F\left(200; \frac{1}{6}; 32\right) \\ &\overset{TW}{=} 1 - 0,44538 = 0,55462 \end{aligned}$$

Zweiseitiger Test:

$$\begin{aligned} P(\beta) &= P(A) = P(\{31, \ldots, 48\}) = F\left(200; \frac{1}{6}; 48\right) - F\left(200; \frac{1}{6}; 30\right) \\ &\overset{TW}{=} 0,99703 - 0,30074 = 0,69629 \end{aligned}$$