Erwartungshorizont

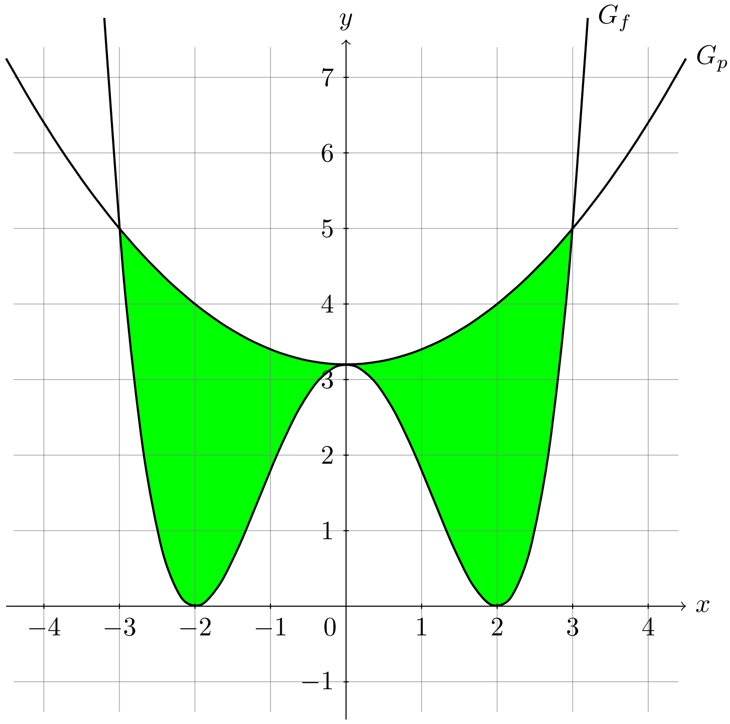
Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{5}(x-2)^2(x+2)^2$ und $p : x \mapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{16}{5}$

a) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit ihren Vielfachheiten. (2 BE)

Die Funktion ist in Linearfaktorzerlegung gegeben, daher lassen sich die Nullstellen leicht ablesen: je eine doppelte Nullstelle bei $x = \pm 2$.

b) Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: $-4 \leq x \leq 4$; $-1 \leq y \leq 7$) (3 BE)



c) Die Graphen von f und p schließen im ersten und zweiten Quadranten eine endliche Fläche ein. Markiere diese Fläche in der Zeichnung und berechne ihre Maßzahl. (8 BE)

Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= p(x) \\
\frac{1}{5}(x-2)^2(x+2)^2 &= \frac{1}{5}x^2 + \frac{16}{5} \\
(x^2-4)^2 &= x^2 + 16 \\
x^4 - 8x^2 + 16 &= x^2 + 16 \\
x^4 - 9x^2 &= 0 \\
x^2(x^2 - 9) &= 0 \qquad \Rightarrow x_{1,2} = 0, \quad x_{3,4} = \pm 3
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt bei $x_{1,2} = 0$ ist nur ein Berührpunkt der Graphen und damit ohne Belang.

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^3 p(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 \frac{1}{5}(x^2+16) - \frac{1}{5}(x^4 - 8x^2 + 16)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{5}\int_0^3 -x^4 + 9x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\left[-\frac{1}{5}x^5 + 3x^3\right]_0^3 = \frac{2}{5}\left[\left(-\frac{1}{5}3^5 + 3\cdot 3^3\right) - 0\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(-\frac{243}{5} + 81\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{162}{5} = \frac{324}{25} = 12,96\,[\mathrm{FE}] \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Schachmeister Grandus Rochadus gewinnt erfahrungsgemäß 88% aller Spiele. Auf einem Turnier in EnPassant wird er insgesamt 10 Spiele bestreiten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) genau 6 Spiele gewinnt? (1 BE)

$$P(\text{„genau 6 Spiele“}) = B(10;0,88;6) = \binom{10}{6}0,88^6 0,12^4 = 0,0202227546$$

b) mindestens 8 Spiele gewinnt? (3 BE)

$$\begin{aligned} P(\text{„mindestens 8 Spiele“}) &= P(\{8,9,10\}) = B(10;0,88;8) + B(10;0,88;9) + B(10;0,88;10) \\ &= \binom{10}{8}0,88^8 0,12^2 + \binom{10}{9}0,88^9 0,12^1 + \binom{10}{10}0,88^{10}0,12^0 \\ &= 0,2330431721 + 0,3797740582 + 0,278500976 \\ &= 0,8913182063 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Nachdem es in der Partei „Die Kleinkarierten“ zu mehreren Grundsatzdiskussionen kam, befürchtet der Parteivorstand, dass der Rückhalt in der Bevölkerung gesunken sein könnte und nicht mehr, wie bei der letzten Wahl, 25% beträgt.
Dies soll durch eine Befragung von 200 Personen in der Fußgängerzone überprüft werden.

Anmerkung zur Lösung: Die Aufgabe kann sowohl als einseitiger, wie auch als zweiseitiger Test verstanden werden. Dementsprechend gibt es für beide Lösungen die volle Punktzahl!

a) Gib die Nullhypothese und die Gegenhypothese an. (1 BE)

Einseitiger Test: $H_0 : p < 0,25 \quad H_1 : p \geq 0,25$
Zweiseitiger Test: $H_0 : p = 0,25 \quad H_1 : p \neq 0,25$

b) Bestimme Annahme- und Ablehnungsbereich so, dass der α-Fehler höchstens 8% beträgt. (4 BE)

Einseitiger Test: $A = \{0,\ldots,k\}, \bar{A} = \{k+1,\ldots,200\}$

$$P(\alpha) = P(\bar{A}) \leq 0,08 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - F(200;0,25;k) \overset{TW}{=} 1 - 0,93753 = 0,06247 \textit{ falls } k = 59$$

$$\Rightarrow A = \{0,\ldots,59\}, \bar{A} = \{60,\ldots,200\}$$

Zweiseitiger Test: $\bar{A} = \{0,\ldots,k\} \cup \{m,\ldots,200\}, A = \{k+1,\ldots,m-1\}$

$$P(\alpha) = P(\bar{A}) \leq 0,08 \Rightarrow P(\{0,\ldots,k\}) \leq 0,04 \textit{ und } P(\{m,\ldots,200\}) \leq 0,04 \overset{TW}{\Rightarrow}$$

$P(\{0,\ldots,k\}) = 0,02758, P(\{m,\ldots,200\}) = 1-P(\{0,\ldots,m-1\}) = 0,03232$ *falls* $k = 38, m = 62$

$$\Rightarrow \bar{A} = \{0,\ldots,38\} \cup \{62,\ldots,200\}, A = \{39,\ldots,61\}$$

c) Tatsächlich hat sich die Zahl derer, die „Die Kleinkarierten“ wählen würden sogar auf $\frac{1}{3}$ vergrößert, da die Diskussionen sehr sachlich geführt wurden.
Berechne mit dieser Information den β-Fehler des Tests. (2 BE)

Einseitiger Test:

$$P(\beta) = P(A) = P(\{0,\ldots,59\}) = F\left(200; \frac{1}{3}; 59\right) \stackrel{TW}{=} 0,14085$$

Zweiseitiger Test:

$$P(\beta) = P(A) = P(\{39,\ldots,61\}) = F\left(200; \frac{1}{3}; 61\right) - F\left(200; \frac{1}{3}; 38\right) \stackrel{TW}{=} 0,22019 - 0 = 0,22019$$