Erwartungshorizont – Analysis

Aufgabe 1

Gegeben ist die reelle Funktionenschar f_a mit der Gleichung:

$$f_a(x) = \frac{1}{3}\left(-4x^3 - 6ax^2 + a^3\right), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Die zugehörigen Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie Art und Lage sämtlicher Extrempunkte und des Wendepunktes in Abhängigkeit von a. (7 BE)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(-12x^2 - 12ax\right) = -4x^2 - 4ax \\ f''(x) &= -8x - 4a \\ f'''(x) &= -8 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^2 - 4ax = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x(x+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -a$$

$$f''(0) = -4a < 0 \Rightarrow HOP\left(0 \middle| \frac{a^3}{3}\right) \qquad f''(-a) = 4a > 0 \Rightarrow TIP\left(-a \middle| -\frac{a^3}{3}\right)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8x - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{a}{2} \quad \text{mit } f'''(x) = -8 \neq 0 \Rightarrow WP\left(-\frac{a}{2} \middle| 0\right)$$

1.2 Bestimmen Sie nun den Parameter a so, dass die Tangente an den Graphen G_{f_a} im Punkt $P(-1|y_P)$ zur Geraden mit der Gleichung $12x - 3y = 1,5$ parallel verläuft. (3 BE)

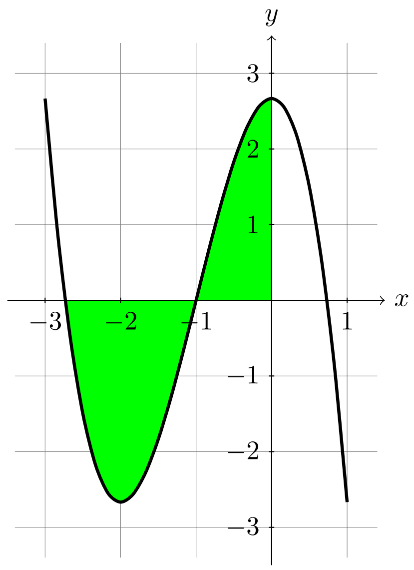
$$12x - 3y = 1,5 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 0,5 \quad \Rightarrow \quad m = 4$$

$$f'(-1) = -4(-1)^2 - 4a(-1) = -4 + 4a \overset{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Für die Folgenden Aufgaben sei $a = 2$!

1.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 für $x \in [-3; 1]$ in ein Koordinatensystem – 1 Längeneinheit $\widehat{=}$ 2cm. (3 BE)

$$f_2(x) = -\frac{4}{3}\left(x^3 + 3x^2 - 2\right)$$



1.4 Der Graph von f_2 schließt im zweiten und dritten Quadranten mit der x- und y-Achse eine endliche Fläche ein. Markieren Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie ihre Flächenmaßzahl. (8 BE)

1. Schritt: Nullstellen berechnen

$$f_2(x) = -\frac{4}{3}\left(x^3 + 3x^2 - 2\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 3x^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

Durch probieren: $x_1 = -1$

$$\begin{array}{l}
\big(x^3 + 3x^2 \qquad\quad - 2\big) : \big(x+1\big) = x^2 + 2x - 2 \\
\underline{-\,x^3 \;\; - x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 \\
\qquad \underline{-\,2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad\quad -\,2x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Der Integrationsbereich läuft also von $-1-\sqrt{3}$ *bis 0 und muss wegen der Nullstelle* $x_1 = -1$ *in seinem Inneren in zwei Teile aufgeteilt werden:*

$$A = \left|\int_{-1-\sqrt{3}}^{-1} f_2(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_{-1}^{0} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \left|\left[F_2(x)\right]_{-1-\sqrt{3}}^{-1}\right| + \left[F_2(x)\right]_{-1}^{0}$$

mit $F_2(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x\right) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x$ *gilt also:*

$$\begin{aligned}
A &= \left|\left(F_2(-1) - F_2\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\right| + \left(F_2(0) - F_2(-1)\right) \\
&= \left|\left(-\frac{1}{3}(-1)^4 - \frac{4}{3}(-1)^3 + \frac{8}{3}(-1)\right) - \left(-\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^4 - \frac{4}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3 + \frac{8}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\right| \\
&\quad + \left(\left(-\frac{1}{3}(0)^4 - \frac{4}{3}(0)^3 + \frac{8}{3}(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^4 - \frac{4}{3}(-1)^3 + \frac{8}{3}(-1)\right)\right) \\
&= \left|\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)\right| + \left((0) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right)\right) = \left|\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)\right| + \left((0) - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) \\
&= \left|-\frac{9}{3}\right| + \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{3} + \frac{5}{3} = \frac{14}{3} = 4,\bar{6}\ [\mathrm{FE}]
\end{aligned}$$

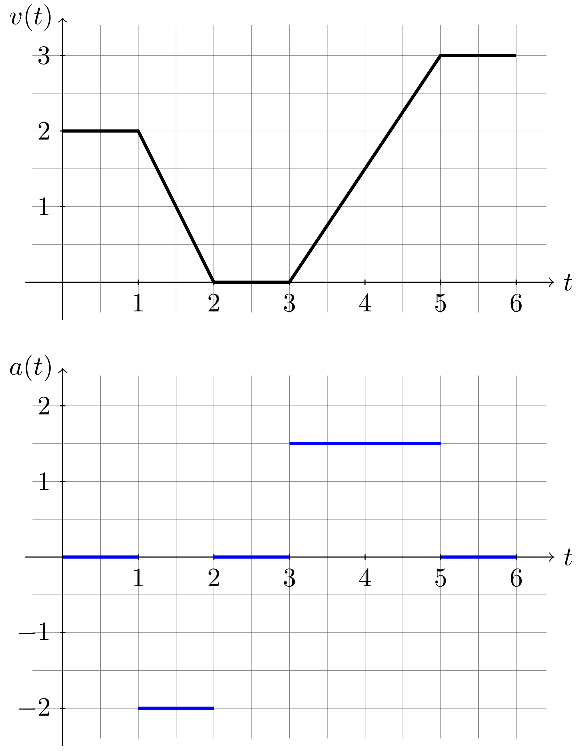
Aufgabe 2

Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Fahrzeugs (in Kilometern pro Minute) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten).

2.1 Geben Sie die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2$ und $t = 4$ an. (1 BE)

$$v(2) = 0\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}\right] \quad , \quad v(4) = 15\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}\right]$$

2.2 Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ ist die Beschleunigung $a(t)$. Zeichnen sie den Graphen der Funktion $a(t)$.



(2 BE)